

УДК 539.3

Равновесная конфигурация сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей по геодезическим линиям

Чан Ки Ан

Разработана методика расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек, полученных геодезической намоткой с различными углами укладки нитей левого и правого семейств. Методика сведена к численному интегрированию системы двух уравнений с начальными условиями. Приведены примеры построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями при различных значениях безразмерных параметров.

Ключевые слова: сетчатые оболочки, равновесная конфигурация, геодезическая несимметричная укладка нитей.

The article presents an approach to calculate the uniform deformation of lattice shells obtained from geodesic winding two systems of left and right wires around a spiral rib at different angles. The approach is based on solving a system of two differential equations with specific initial conditions using numerical method. As illustrative examples, we apply the approach to calculate the uniform deformation of lattice shells asymmetrically wound with different values of dimensionless parameters.

Keywords: lattice shells, equilibrium profile, asymmetrical geodesic winding.

Композитные оболочки, выполненные непрерывной намоткой успешно применяют при конструировании баллонов давления, корпусов летательных аппаратов и других изделий. Если семейств нитей всего две — левое и правое, то сетка нитей является геометрически изменяемой, так как в ее основе лежит нежесткая фигура — параллелограмм, а сами нити могут свободно изгибаться. Некоторую конфигурацию, которая называется равновесной, такая оболочка приобретает при приложении основных нагрузок — давления и осевой силы (аналогичным образом ведут себя «мягкие» оболочки). Равновесная конфигурация определяется теорией сетчатых оболочек [1, 2]. При намотке на оправку из условия отсутствия проскальзывания следует, что нить должна ложиться по геодезическим линиям оправки [3], поэтому равновесные профили таких оболочек иногда называют геодезическими.

Как правило, наклон нитей левого и правого семейств одинаков [1—3], что обусловлено технологией непрерывной намотки. Однако, если допустить возможность различного наклона нитей левого и правого семейств, то это существенно расширит спектр равновесных конфигураций сетчатых оболочек, изготавливаемых намоткой. Данная ста-



Чан Ки Ан
аспирант кафедры
«Прикладная механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

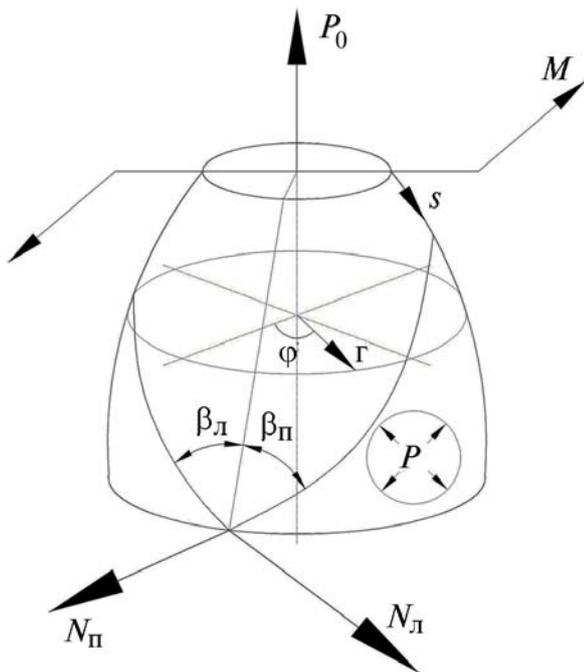


Рис. 1. Схема нагружения сетчатой оболочки, координаты и расположение нитей на ее срединной поверхности

тъя посвящена разработке методики расчета и построения профилей таких оболочек.

Стенка сетчатой оболочки вращения образована сетью из двух несимметрично расположенных систем нитей (рис. 1). Поверхность такой оболочки удобно исследовать, пользуясь обычной системой гауссовых координат s, φ : s — длина дуги меридиана от некоторой начальной параллели; φ — угол, определяющий положение меридиональной плоскости.

В произвольной точке оболочки направления нитей составляют с меридианом углы $\beta_{\text{п}}$ и $\beta_{\text{л}}$, которые зависят только от координаты s .

Участок $ds_2 = rd\varphi$ пересекает $k \frac{ds_2}{h_{\text{п}}} \cos \beta_{\text{п}}$ и $k \frac{ds_2}{h_{\text{л}}} \cos \beta_{\text{л}}$ нитей каждого из направлений, где $h_{\text{л}}, h_{\text{п}}$ — шаги нитей левого и правого семейств (рис. 2), k — количество слоев. Суммарное усилие в меридиональном направлении, воспринимаемое участком ds_2 , составляет (см. рис. 2)

$$T_1 ds_2 = k N_{\text{п}} \frac{ds_2}{h_{\text{п}}} \cos^2 \beta_{\text{п}} + k N_{\text{л}} \frac{ds_2}{h_{\text{л}}} \cos^2 \beta_{\text{л}},$$

где $N_{\text{п}}, N_{\text{л}}$ — усилие в нитях (натяжение) правого и левого семейства.

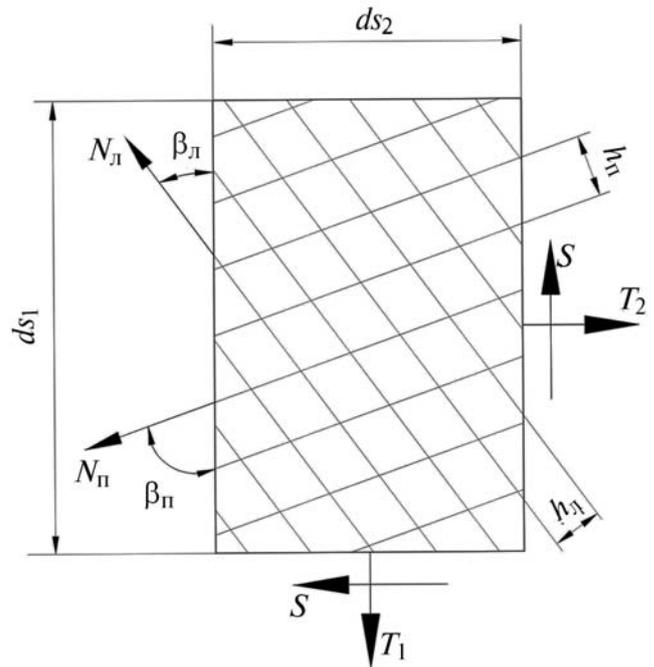


Рис. 2. Шаги нитей, натяжения нитей и мембранные усилия ($ds_1 = ds, ds_2 = rd\varphi$)

Отношение полученной силы к ds_2 дает мембранное усилие T_1 , усилия T_2 и S получают-ся аналогично:

$$\begin{cases} T_1 = k \frac{N_{\text{п}}}{h_{\text{п}}} \cos^2 \beta_{\text{п}} + k \frac{N_{\text{л}}}{h_{\text{л}}} \cos^2 \beta_{\text{л}}; \\ T_2 = k \frac{N_{\text{п}}}{h_{\text{п}}} \sin^2 \beta_{\text{п}} + k \frac{N_{\text{л}}}{h_{\text{л}}} \sin^2 \beta_{\text{л}}; \\ S = k \frac{N_{\text{п}}}{h_{\text{п}}} \cos \beta_{\text{п}} \sin \beta_{\text{п}} - k \frac{N_{\text{л}}}{h_{\text{л}}} \cos \beta_{\text{л}} \sin \beta_{\text{л}}. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) связывает три мембранных усилия T_1, T_2, S с двумя натяжениями нитей $N_{\text{п}}, N_{\text{л}}$. Исключив $N_{\text{п}}, N_{\text{л}}$ из (1), получим следующее тождественное соотношение, связывающее T_1, T_2 и S :

$$T_2 = S(\text{tg} \beta_{\text{п}} - \text{tg} \beta_{\text{л}}) + T_1 \text{tg} \beta_{\text{п}} \text{tg} \beta_{\text{л}}. \quad (2)$$

При отсутствии крутящего момента отсутствует и сдвигающая сила ($S = 0$), что приводит к упрощенному варианту выражения (2):

$$T_2 = T_1 \text{tg} \beta_{\text{п}} \text{tg} \beta_{\text{л}}. \quad (3)$$

Соотношение (3) обобщает хорошо известное уравнение (4) из работ [1, 2] на случай несимметричной укладки нитей

$$T_2 = T_1 \operatorname{tg}^2 \beta. \quad (4)$$

В работе [1] показано, что из формулы (4) следует результирующее геометрическое соотношение

$$\sin \theta = A \left(r^2 + P_0 / \pi p \right) e^{-\int \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{r} dr}, \quad (5)$$

где θ — угол наклона нормали к оси оболочки; A — произвольная постоянная.

Поскольку переход от симметричной укладки к несимметричной фактически сводится к замене (4) на (3), т. е. к замене $\operatorname{tg}^2 \beta$ на $\operatorname{tg} \beta_n \operatorname{tg} \beta_l$, то очевидно, что аналогичная замена в (5) приводит к результирующему геометрическому соотношению для несимметричной укладки нитей

$$\sin \theta = A \left(r^2 + P_0 / \pi p \right) e^{-\int \frac{\operatorname{tg} \beta_n \operatorname{tg} \beta_l}{r} dr}. \quad (6)$$

Для оболочек, изготавливаемых намоткой натянутых нитей на оправку (например, для стеклопластиковых оболочек, получаемых спиральной намоткой), нити укладывают по кратчайшим расстояниям, т. е. по геодезическим линиям. Уравнение геодезических линий на поверхности вращения имеет вид [1]

$$\sin \beta_n = \frac{c_n}{r}; \quad \sin \beta_l = \frac{c_l}{r}, \quad (7)$$

где c_n, c_l — геометрические параметры, определяемые технологией изготовления. Подстановка (7) в (6) приводит к неопределенному интегралу, вычисляемому в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} \beta_n \operatorname{tg} \beta_l}{r} dr &= \int \frac{c_n c_l}{r \sqrt{r^2 - c_n^2} \sqrt{r^2 - c_l^2}} dr = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{c_l \sqrt{r^2 - c_n^2} + c_n \sqrt{r^2 - c_l^2}}{c_n \sqrt{r^2 - c_n^2} - c_l \sqrt{r^2 - c_l^2}} \right|, \end{aligned} \quad (8)$$

где знак модуля вызван симметрией при замене индексов ($c_n \leftrightarrow c_l$).

Из выражений (6) и (8) следует основная формула, определяющая геометрию рассматриваемого класса оболочек:

$$\sin \theta = A \left(r^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right) \left| \frac{c_l \sqrt{r^2 - c_n^2} - c_n \sqrt{r^2 - c_l^2}}{c_n \sqrt{r^2 - c_n^2} + c_l \sqrt{r^2 - c_l^2}} \right|^{1/2}. \quad (9)$$

Постоянная A определяется из условия на экваторе оболочки: для максимального радиуса оболочки $r = R$ наклон нормали к оси составляет прямой угол ($\sin \theta = 1$), это приводит к окончательному выражению для $\sin \theta$:

$$\sin \theta = \frac{\left(r^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right) \left| \frac{c_l \sqrt{r^2 - c_n^2} - c_n \sqrt{r^2 - c_l^2}}{c_n \sqrt{r^2 - c_n^2} + c_l \sqrt{r^2 - c_l^2}} \right|^{1/2}}{\left(R^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right) \left| \frac{c_l \sqrt{R^2 - c_n^2} - c_n \sqrt{R^2 - c_l^2}}{c_n \sqrt{R^2 - c_n^2} + c_l \sqrt{R^2 - c_l^2}} \right|^{1/2}}. \quad (10)$$

Осевая и радиальная координата связаны следующим образом:

$$dz = dr \operatorname{tg} \theta = - \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} dr. \quad (11)$$

Из выражений (10) и (11) следует, что определение уравнения меридиана оболочки $z = z(r)$ свелось к квадратуре. Однако вычисление указанной квадратуры затруднительно из-за обращения знаменателя (11) в нуль на экваторе оболочки. В связи с этим численное интегрирование проводилось по безразмерному меридиану оболочки на основе соотношений

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \sin \theta; \\ \frac{dr}{ds} &= \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для сокращения числа параметров, определяющих форму оболочки, были введены безразмерные параметры

$$\alpha_n = \frac{c_n}{R}; \quad \alpha_l = \frac{c_l}{R}; \quad \Pi = \frac{P_0}{\pi p R^2}. \quad (13)$$

Аналогичным образом вводились безразмерные переменные:

$$\sigma = \frac{s}{R}; \quad \rho = \frac{r}{R}; \quad \zeta = \frac{z}{R}. \quad (14)$$

Подстановки (13), (14) в (10), (12) приводят к системе безразмерных дифференциальных уравнений, удобной для расчета профиля оболочки:

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\rho^2 + \Pi}{1 + \Pi} \frac{\left| \frac{\alpha_l \sqrt{\rho^2 - \alpha_l^2} - \alpha_n \sqrt{\rho^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n \sqrt{\rho^2 - \alpha_l^2} + \alpha_l \sqrt{\rho^2 - \alpha_n^2}} \right|^{1/2}}{\left| \frac{\alpha_l \sqrt{1 - \alpha_n^2} - \alpha_n \sqrt{1 - \alpha_l^2}}{\alpha_n \sqrt{1 - \alpha_l^2} + \alpha_l \sqrt{1 - \alpha_n^2}} \right|^{1/2}}; \\ \frac{d\zeta}{d\sigma} &= \sin \theta; \\ \frac{d\rho}{d\sigma} &= -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Для интегрирования уравнения (15) применялись встроенные процедуры из компьютерного пакета MATLAB. Нижняя граница интервала интегрирования принималась равной нулю ($\sigma = 0$), верхняя граница определялась подбором. Система (15) интегрировалась со следующими начальными условиями:

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta(0) &= 0; \\ \rho(0) &= 1. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Построенные профили оболочек, полученные численным интегрированием уравнения (15) с учетом (16) представлены на рис. 3–4.

С целью сопоставления на рисунках показаны также равновесные профили сетчатых оболочек с симметрично уложенными нитями ($\alpha_l = \alpha_n = 0,5$), для расчета которых применялась методика из [1] (применение уравнений (16) в случае симметричной укладки нитей невозможно из-за обращения числителя и знаменателя дроби в нуль). Из рисунков видно, что несимметричная укладка, в самом деле, позволяет получать профили существенно отличающиеся от традиционных профилей, изготовленных симметричной намоткой.

Выводы

1. Разработана методика расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметричной геодезической укладкой нитей.
2. Основное уравнение, определяющее равновесную конфигурацию оболочки, проинтегрировано в аналитическом виде. Для уравнений, определяющих координаты равновесного профиля приведены несложные дифференциальные уравнения (16) с начальными условиями (17).

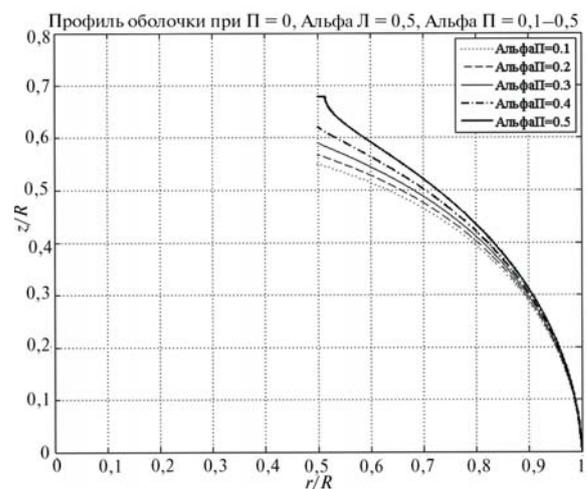


Рис. 3. Равновесные профили сетчатой оболочки при $\Pi=0$, $\alpha_l=0,5$, $\alpha_n=\{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5\}$

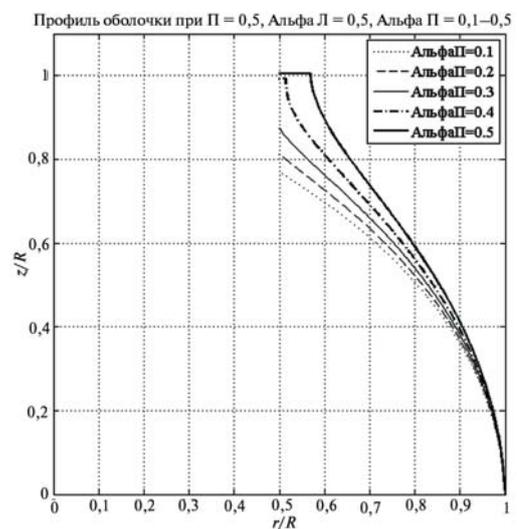


Рис. 4. Равновесные профили сетчатой оболочки при $\Pi=0,5$, $\alpha_l=0,5$, $\alpha_n=\{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5\}$

3. Представлены примеры построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями при различных значениях безразмерных параметров. Показано, что несимметричная укладка нитей значительно расширяет набор равновесных профилей.

Литература

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
2. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1966. № 1. С. 81–89.
3. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

Статья поступила в редакцию 01.11.2011